

# Introducción a la Mecánica Celeste

Abel Gutarra

Facultad de Ciencias-UNI

(Basado en la exposición para el grupo de Astronomía realizada el 21/11/97)

El mes de Agosto de 1986 algunos estudiantes colocamos un aviso llamando a una reunión a “todos los interesados en la astronomía, y ese día, sin más trámite, se formó el Grupo de Astronomía de Ciencias.

Nos sorprendió la concurrencia numerosa y variada. Llegaron, matemáticos, físicos y químicos. Cada uno contó sus experiencias sobre el tema. Algunos experimentados podían distinguir planetas a simple vista y sabían ubicarse con facilidad en el cielo nocturno. Hubo quienes ya habían observado a Saturno con telescopio y podían dar fe de que, efectivamente, .....tenía anillos;. No faltó algún esotérico entusiasmado por el encuentro, y otros, más convencionales, que sólo queríamos aclarar las dudas que nos dejaron algunas lecturas.

Hay muchas anécdotas sobre esos años de formación del grupo, y nos llena de satisfacción que varios de sus integrantes hallan culminado sus doctorados en astronomía o astrofísica y actualmente estén realizando investigación en diferentes partes del mundo.

Ahora paso a mi historia. La invitación a esta charla de los viernes fue para tratar un tema de astronomía y contar porqué me uní al grupo. Mi interés inicial fueron las polémicas *Líneas de Nazca*. Había escuchado, como muchos de ustedes, que tendrían significado astronómico. Quería saber que había de cierto.

## Algunos datos.

*Paul Kosok*, las vio por primera vez hace unos 70 años, desde alguno de los primeros aeroplanos que volaron cielo peruano. *Kosok* estudiaba canales de irrigación precolombinos, y comunicó a *María Reich*, el hallazgo. Ambos elaboraron entre 1965-68 la teoría según la cual, las líneas representaban un calendario astronómico[2]. Esta opinión tuvo mucha fuerza hasta que *Gerald Hawkins*, entró en escena en 1973. *Hawkins* se hizo famoso por haber comprobado que los *monolitos de Stonehenge* (Inglaterra) tenían finalidad astronómica. Para demostrarlo, utilizó una computadora y encontró que, estadísticamente, las posiciones de gran parte del ordenamiento de piedras, guías, y muros señalaban a posiciones especiales del cielo donde, en esa época, ocurrían eventos astronómicos importantes, como solsticios, equinoccios, orto u ocaso de estrellas o constelaciones. Cuando aplicó el método a Nazca sólo encontró un mínimo de coincidencias entre líneas y direcciones astronómicas “importantes”, las cuales serían resultado del azar[3]. *Alberto Rossel* (1977), planteó que las líneas fueron empleadas para representaciones coreográficas[4] (mismo aeróbicos precolombinos). *William Isbell* (1978) propuso que la elaboración de las líneas no tendría un propósito específico, sino que servirían para ocupar el excedente de mano de obra de la gente que estuvo construyendo pirámides en la zona[5]. La aridez del suelo nazquense hizo proponer a *Georg Petersen* (1980) que el propósito de las líneas y sobre todo de las figuras, era el culto al agua[6]. *Johan Reinhard* (1987) refuerza este punto de vista integrando el binomio cerro-agua como objeto de los rituales para los cuales las líneas y figuras fueron dibujadas[7]. Existen al menos cinco teorías más, pero giran alrededor de las anteriores, con algunos matices. No faltaron las extravagancias, como las de un tal *Von Daniken*, que andaba involucrando extraterrestres en el asunto. Lo que me llamó la atención es que a medida que el tiempo pasaba los argumentos *astronómico-prácticos* iban perdiendo fuerza frente los argumentos *rituales-invocativos*. Entendí que sólo conociendo un poco más sobre el movimiento de los astros, podría opinar sobre el significado de las líneas.

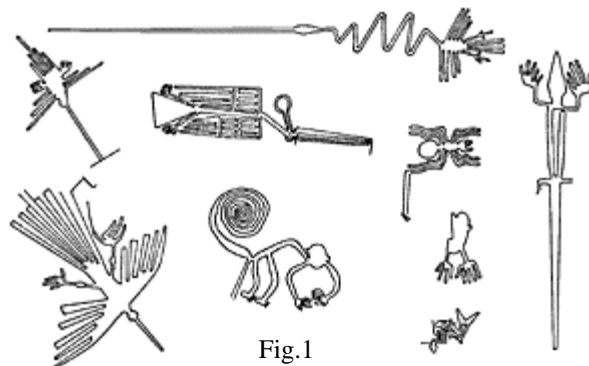


Fig.1

## Cuestión de orden

Pensé que para analizar los argumentos astronómicos, lo primero sería entender cuantitativamente el movimiento de los cuerpos celestes. Curiosamente, apenas empezando la búsqueda, encontré una suerte de números mágicos que reproducían las distancias promedio de los planetas al Sol. Según esta regla, llamada de Titius y Bode[8], debemos partir de la serie: 0, 1, 2, 4, 8, etc.; multiplicar cada término por 3; sumarle cuatro y dividirlos entre 10, para obtener, con excelente aproximación, las distancias de los planetas al Sol. No fue un buen comienzo, teniendo en cuenta que yo esperaba aplicar rabiosamente las Leyes de Newton, que había aprendido en mi curso de mecánica.

Hasta ahora sigo intrigado con esta tabla y no sé si existe una explicación racional o es sólo una feliz coincidencia. De cualquier modo no se qué más difícil responder: el porqué los nazquenses hicieron esas líneas ó de donde sacó Titius estos números.

<u>Ley de Titius-Bode</u>	
0, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64	(x3)
0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192	(+4)
4, 7, 10, 16, 28, 52, 100, 196	(÷10)
<hr/>	
0.4, 0.7, 1.0, 1.6, 2.8, 5.2, 10, 19.6	
Distancias observadas	Mercurio: 0.387
	Venus: 0.723
	Tierra: 1.000
	Marte: 1.524
	Asteroides: 2.5-5.8
	Júpiter: 5.203
	Saturno: 9.539
Urano: 19.539	

### Las leyes de Kepler

Las dos primeras leyes fueron enunciadas por Kepler en su libro *Astronomia Nova*, publicado en Praga en 1609. La tercera ley fue publicada en su libro *Harmonice Mundi* en 1619[9].

Los enunciados son los siguientes:

- **PRIMERA LEY:** Los planetas se mueven en órbitas elípticas y el sol ocupa uno de los focos de cada órbita.
- **SEGUNDA LEY:** Cada planeta se mueve en su órbita con una velocidad tal que la línea que lo une al sol, barre áreas iguales en tiempos iguales.

Estas dos leyes son importantes por su simpleza, porque prescinden de combinar curvas diferentes, como se hacía antes con los *epiciclos* y *deferentes* para explicar el movimiento de los planetas. Además, refutan la idea de órbitas circulares como propusieron *Tolomeo* y *Copérnico*.

- **TERCERA LEY:** Si  $T_1$  y  $T_2$  son los periodos requeridos por dos planetas para completar sus órbitas y  $R_1$ ,  $R_2$  las respectivas distancias medias entre los planetas y el sol, la razón de los cuadrados de los periodos es igual a la razón entre los cubos de las distancias promedio al sol, esto es:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \quad (1)$$

Esta última ley fue una comprobación numérica de datos acumulados, pero no causó tanto escándalo, porque no tocaba cuestiones “esenciales”, como la forma de la órbita o la posición de los planetas en el cielo, cuyo cuestionamiento podía conducir al discrepante, directo al brasero[9][10].

Estas tres leyes fueron obtenidas por Kepler sin utilizar el concepto de fuerza que sería un aporte posterior de Newton. En nuestros días, se espera que un estudiante de ciencias o ingeniería de primeros años sea capaz de llegar a la demostración de las leyes de Kepler **mediante** las leyes de Newton. Mostraremos uno de los métodos expuestos por Weinstock en la referencia [11] para demostrar la primera ley de Kepler.

Las fuerza de atracción gravitacional que experimenta un cuerpo de masa  $m$  hacia un centro de fuerzas  $F$  está dado por[12]:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{-k\vec{r}}{r^3}, \quad (2)$$

donde  $k = GM$ ,  $G$  la constante de gravitación y  $M$  la masa del cuerpo ubicado en el origen  $F$ , considerado inmóvil. Separando las componentes del vector  $\ddot{\vec{r}}$ ,

$$\ddot{x} = -\frac{kx}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{ky}{r^3}, \quad (3)$$

donde el módulo del vector posición es,

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad (r > 0), \quad (4)$$

y las equivalencias entre coordenadas cartesianas y polares son,

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi. \quad (5)$$

Para demostrar la primera ley de Kepler debemos recordar algunas propiedades de la elipse[13].

La ecuación de una recta en coordenadas cartesianas está dada por:

$$Ax + By + C = 0, \quad (6)$$

donde  $A$ ,  $B$ , y  $C$  son constantes. La distancia de un punto de coordenadas  $(x, y)$  a dicha recta es:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (7)$$

La elipse se define como el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto  $F$ , dividido por la distancia del mismo punto a una recta, está dada por una constante  $\epsilon < 1$  llamada excentricidad. Asumiendo que el punto  $F$  se encuentra en el origen de coordenadas y teniendo en cuenta las ecuaciones (4) y (7), la ecuación de una elipse está dada por:

$$\epsilon = \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{\left( \frac{Ax + By + C}{[A^2 + B^2]^{1/2}} \right)}. \quad (8)$$

Volviendo a la fuerza de atracción gravitacional dada por las ecuaciones (3), observamos que:

$$0 = x\ddot{y} - \ddot{x}y = \frac{d}{dt}(x\dot{y} - \dot{x}y), \quad (9)$$

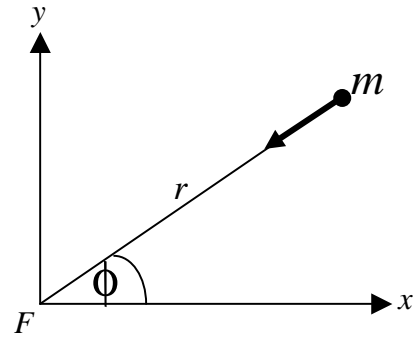


Fig. 2

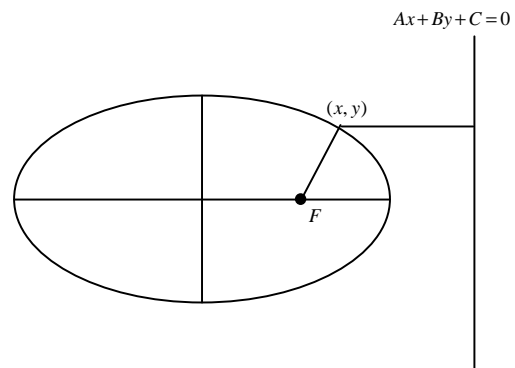


Fig. 3

de aquí deducimos que la cantidad entre paréntesis debe ser una constante,

$$x\dot{y} - \dot{x}y = b. \quad (10)$$

Partiendo de la ecuación (5), la ecuación (10) se puede escribir en coordenadas polares como,

$$r^2\dot{\phi} = b. \quad (11)$$

Dividiendo la ecuación (3) por (11), multiplicando por  $r^2$  y reemplazando (5), obtenemos:

$$\frac{\ddot{x}}{\dot{\phi}} = -\frac{k}{b}\cos\phi, \quad \frac{\ddot{y}}{\dot{\phi}} = -\frac{k}{b}\sin\phi, \quad (12)$$

que usando la regla de la cadena podemos simplificar a:

$$\frac{d\dot{x}}{d\phi} = -\frac{k}{b}\cos\phi, \quad \frac{d\dot{y}}{d\phi} = -\frac{k}{b}\sin\phi. \quad (13)$$

Las ecuaciones anteriores pueden ser integradas,

$$\dot{x} = -(k/b)(\sin\phi - B), \quad (14)$$

$$\dot{y} = (k/b)(\cos\phi - A), \quad (15)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes de integración.

Si reemplazamos las ecuaciones (14) y (15) en (10) y utilizando las ecuaciones (4) y (5) obtenemos:

$$(x^2 + y^2)^{1/2} = Ax + By + (b^2/k). \quad (16)$$

Recordemos que la ecuación (16) ha sido obtenida a partir de la ley de gravitación y representa relaciones entre las coordenadas de la masa puntual  $m$ . Sin embargo, al reescribirla de la siguiente manera:

$$\frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{\left( \frac{Ax + By + (b^2/k)}{[A^2 + B^2]^{1/2}} \right)} = (A^2 + B^2)^{1/2}, \quad (17)$$

y al ser comparada con la ecuación (8) podemos afirmar que representa una elipse cuya excentricidad es,

$$\varepsilon = (A^2 + B^2)^{1/2}. \quad (18)$$

La segunda ley de Kepler puede deducirse de la ecuación (11) si acomodamos la expresión como:

$$\frac{1}{2}r^2d\phi = \frac{1}{2}bdt. \quad (19)$$

El primer miembro de la ecuación (19) representa el sector circular barrido por el radio vector del planeta durante un diferencial de tiempo  $dt$ . Integrando ambos miembros, obtenemos la relación lineal entre area barrida y tiempo transcurrido,

$$A(t) = \frac{1}{2}bt + c. \quad (20)$$

### **Las ecuaciones de Kepler**

El objetivo fundamental de la mecánica celeste es predecir la posición de los planetas en función del tiempo. En el sistema heliocéntrico propuesto por Kepler, esto implica poder calcular las coordenadas  $x(t)$ , e  $y(t)$  del planeta.

Kepler encontró una forma de resolver este problema con argumentos geométricos. Para ello utilizó un ángulo auxiliar llamado *anomalía excéntrica*  $E$ , que se obtiene circunscribiendo una circunferencia a la órbita elíptica. La posición del planeta se proyecta sobre la circunferencia marcando el punto  $Q$  (ver fig. 4). La anomalía excéntrica es el ángulo formado por el eje de la elipse y la longitud radial  $CQ$ . Al ángulo  $\upsilon$  se denomina *anomalía verdadera* aunque no es más que el ángulo polar.

Kepler demostró que si  $T$  es la fecha en que el planeta pasa por el *perihelio* (posición de mínima distancia al Sol), y su periodo de revolución es  $P$ , entonces la anomalía excéntrica  $E$  satisface la ecuación:

$$\frac{2\pi}{P}(t-T) = E - \varepsilon \sin E . \quad (21)$$

La conexión entre la anomalía excéntrica y la anomalía verdadera viene dada por la siguiente relación,

$$\operatorname{tg} \frac{\upsilon}{2} = \left( \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{1/2} \operatorname{tg} \frac{E}{2} , \quad (22)$$

finalmente el módulo del radio vector del planeta se obtiene de:

$$r = a(1 - \varepsilon \cos E) , \quad (23)$$

donde  $a$  es el semieje mayor de la elipse. La demostración de éstas ecuaciones partiendo de relaciones geométricas puede verse en la referencia [14].

Las ecuaciones de Kepler se resuelven de la siguiente manera:

- i) Para un tiempo  $t$  cualquiera, se calcula  $E$  de la ecuación (21) utilizando métodos iterativos, por ejemplo el método de Newton [15].
- ii) Reemplazando  $E$  en la ecuación (22), se despeja  $\upsilon$ .
- iii) Se calcula  $r$  de la ecuación (23)
- iv) Se calculan las coordenadas cartesianas en el plano de la órbita:

$$x(t) = r \cos \upsilon , \quad y = r \operatorname{sen} \upsilon \quad (24)$$

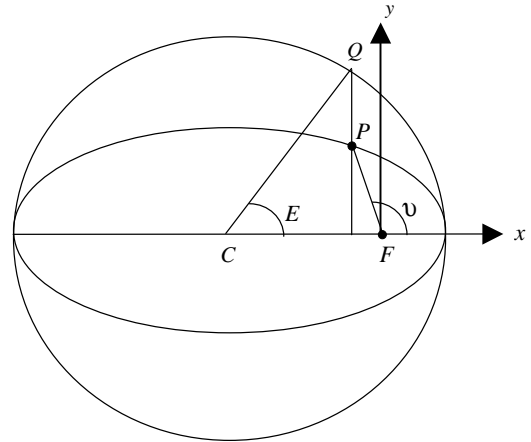


Fig. 4

### La órbita en el espacio

Como hemos visto, las ecuaciones de Kepler permiten describir la posición del planeta en el plano orbital y en un sistema de coordenadas, contenido en él, que usa como origen al Sol. Desde el punto de vista práctico, conviene utilizar un sistema de coordenadas más afín a los terrestres. El sistema más utilizado con estas características es uno que tiene a la Tierra como origen, y al Ecuador como plano base. Para llegar a este sistema debemos proceder por pasos. Aunque todos los planetas tienen al Sol como foco de

sus órbitas elípticas, los planos orbitales de cada uno de ellos no coinciden. El primer paso es seleccionar un plano base y referir a él las posiciones planetarias. El plano elegido se denomina *eclíptica* y se define como aquél que contiene la órbita terrestre alrededor del Sol. Sobre la eclíptica debemos definir una dirección fija a partir de la cual se construyen los tres ejes ortogonales. Primero observemos que el plano ecuatorial y la eclíptica forman un ángulo llamado *oblicuidad*  $e$ , cuyo valor es de  $23^\circ.5$ . Por lo tanto, la intersección de estos dos planos produce una línea cuyos extremos apuntan en direcciones fijas y opuestas del espacio. Visto desde la Tierra, el Sol pasará por esos puntos en dos fechas bien determinadas del año (recuerde la definición de eclíptica), el 21 de Marzo y el 21 de Setiembre. La dirección que corresponde a la posición del Sol el 21 de Marzo se denomina *punto vernal*  $\gamma$  o *punto Aries*, y es la dirección fija elegida en astronomía.

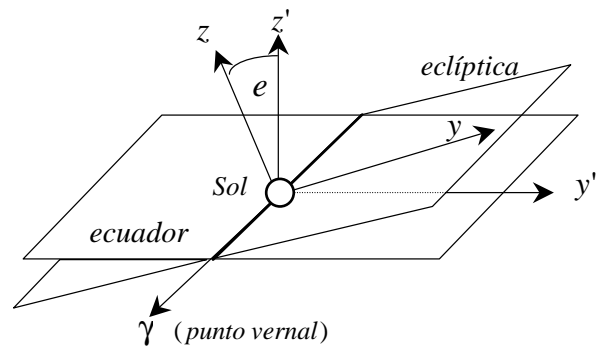


Fig.5

Para que la trayectoria de un planeta quede completamente definida en el espacio necesitamos indicar los siguientes parámetros conocidos como *elementos orbitales*:

$\Omega$  : Argumento del Nodo. Se mide desde el punto vernal hasta el punto corte con la eclíptica llamado nodo. Los nodos pueden ser ascendentes o descendentes de acuerdo a si el corte es de sur a norte o viceversa. Por convención  $\Omega$  se refiere al nodo ascendente.

$i$  : Inclínación. Es el ángulo que el plano la órbita hace con la Eclíptica.

$\omega$  : argumento del perihelio. Este ángulo se mide sobre la órbita del planeta, a partir del nodo ascendente.

$a$  : Semieje mayor de la elipse

$\epsilon$  :Excentricidad de la órbita elíptica

$T$  : Fecha de paso por el perihelio

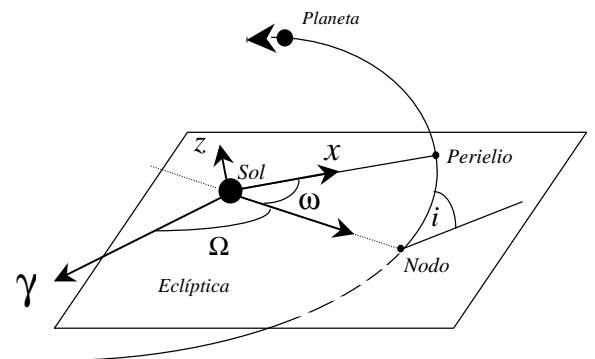


Fig.6

Aunque no se ha representado en el diagrama, no debemos olvidar que la anomalía verdadera  $\mathcal{U}$  mide el ángulo entre el perihelio y la posición instantánea del planeta, y es coplanar con  $\omega$ .

Antes de hacer las proyecciones sobre la eclíptica debemos responder la siguiente pregunta: conociendo las coordenadas de un punto en un sistema  $xyz$  ¿cómo puedo encontrar el valor de sus nuevas coordenadas en un sistema  $x'y'z'$  que rotó respecto al inicial alrededor de uno de los tres ejes?.

La respuesta a esta pregunta es desarrollada en los textos estándar de cálculo ó geometría analítica[13]. Aquí damos los resultados.

Las coordenadas en el sistema rotado  $(x'y'z')$  se obtienen de multiplicar matricialmente las antiguas coordenadas  $(x, y, z)$  por una matriz de rotación que es particular al eje sobre el cuál se hizo la rotación. Matemáticamente:

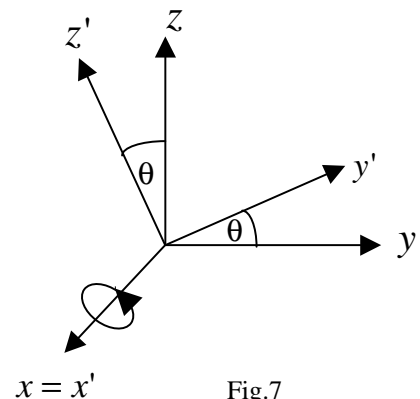


Fig.7

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R_x(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (25)$$

donde  $R_x(\theta)$  representa una rotación alrededor del eje  $x$ , un ángulo  $\theta$  en sentido antihorario, sus componentes están dadas por:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad (26)$$

similarmente, si las rotaciones se realizan sobre el eje  $y$  ó el eje  $z$ , las matrices rotación son, respectivamente:

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Al aplicar las operaciones de rotación a nuestro problema, tengamos en cuenta que las coordenadas  $(x, y, z)$  representan las coordenadas en el plano de la órbita del planeta. Para llegar al sistema basado en el plano de la eclíptica y cuyo eje  $x$  coincida con el punto vernal, debemos seguir los siguientes pasos (observe la Fig. 6):

- i) Una rotación sobre el eje  $z$  un ángulo  $-\omega$  (en sentido horario).
- ii) Una rotación sobre el eje  $x$  un ángulo  $-i$
- iii) Una rotación sobre el eje  $z$  un ángulo  $-\Omega$

Denotaremos por  $(x1, y1, z1)$  este nuevo conjunto de coordenadas obtenido después de aplicar las operaciones i)-iii). Utilizando la notación matricial,

$$\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{bmatrix} = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (29)$$

Nuestro objetivo es llegar a un sistema centrado en la Tierra que tenga al Ecuador como plano base. Para lograr esto necesitamos dos operaciones, primero una rotación que coloque el plano de la eclíptica sobre el Ecuador y finalmente una traslación del sistema hacia la Tierra. La rotación indicada se consigue inmediatamente añadiendo una matriz correspondiente a una rotación sobre el eje  $z$  un ángulo igual a la oblicuidad  $e$  (Ver Fig. 5). Denotando como  $(x2, y2, z2)$  las coordenadas del punto en este nuevo sistema, tenemos:

$$\begin{bmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{bmatrix} = R_x(-e)R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (30)$$

que se diferencia del producto de matrices de la ecuación (29) solamente en el término  $R_x(-e)$ . Observe que la posición de la matriz es importante porque el producto de matrices no es conmutativo.

Para simplificar la notación llamaremos  $\mathbf{P}$  a la matriz que consiste en el producto de rotaciones,

$$\mathbf{P} \equiv R_x(-e)R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega). \quad (31)$$

Esta matriz es única para cada planeta y sus elementos pueden ser calculados a partir de los elementos orbitales publicados. Ver por ejemplo [8].

Con esta notación, las coordenadas del planeta en el sistema (2) se escriben como:

$$\vec{r}_2 = \mathbf{P}\vec{r}. \quad (32)$$

El segundo paso, que corresponde a la traslación del sistema (2) al sistema Tierra-Ecuador, que llamaremos sistema (3) está dada por:

$$\vec{r}_{3p} = \vec{r}_{2p} - \vec{r}_{2T}, \quad (33)$$

donde el subíndice  $p$  hace referencia al planeta estudiado y  $\vec{r}_{2T}$  es el vector posición de la Tierra respecto al Sol.

Reemplazando la ecuación (32) en (33),

$$\vec{r}_{3p} = \mathbf{P}_p \vec{r}_p - \mathbf{P}_T \vec{r}_T. \quad (34)$$

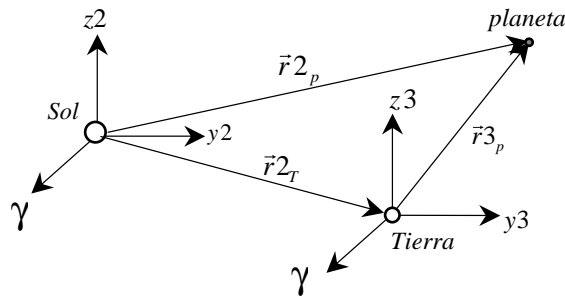


Fig. 8

### Coordenadas ecuatoriales absolutas

Los astrónomos tienen sus preferencias, como todo el mundo. Acostumbran a expresar las coordenadas de los cuerpos celestes mediante dos ángulos llamados *ascensión recta*  $\alpha$  y *declinación*  $\delta$  definidos como sigue:

$$\delta = \text{tg}^{-1} \left[ \frac{z3_p}{\sqrt{x3_p^2 + y3_p^2}} \right] \quad (35)$$

$$\alpha = \text{cos}^{-1} \left[ \frac{x3_p}{\sqrt{x3_p^2 + y3_p^2}} \right] \quad (36)$$

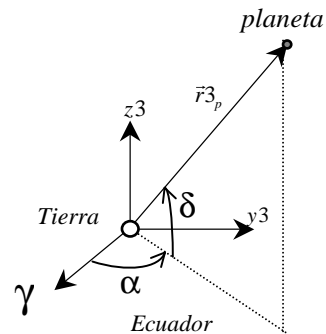


Fig. 9



En términos generales, lo expuesto puede aplicarse a otros cuerpos celestes como cometas o meteoritos, solo es necesario conocer sus elementos orbitales. Además un desarrollo más general de la ley de gravitación nos lleva a la conclusión de que las órbitas pueden ser también parábolas o hipérbolas dependiendo de la energía total del cuerpo y de su momento angular. También debemos recordar que se ha considerado que uno de los cuerpos que interactúan, en este caso el Sol, permanece inmóvil en el foco de la elipse. Este no es el caso para sistemas de dos cuerpos con masas comparables. En la siguiente exposición veremos algunas aplicaciones.

### **Referencias y comentarios**

- [1] El ex-Rector Ignacio Lopez Soria mandó publicar un número especial de la Gaceta (órgano oficial de la UNI) para felicitar a la Facultad de Ciencias por el trabajo del Grupo de Astronomía al fundar clubes escolares de astronomía en varias provincias del Perú. Respecto a los estudiantes que formaron el grupo, podemos mencionar a Milagros Ruiz, (ahora en Inglaterra), Edwin Portocarrero (España), Antonio Pereyra (Brasil), Fredy Aquino (Noruega) todos hacen investigación en astronomía o astrofísica.
- [2] Reiche, María: *Mystery on the Desert*, Stuttgart (1968).
- [3] Hawkins, Gerald: *Ancient lines in the peruvian desert*, Smithsonian Institution, Cambridge (1969)
- [4] Rossel, Alberto: *Arqueología Sur del Perú*, Lima Ed. Universo (1977).
- [5] Isbell, William: *The prehistoric Ground Drawings of Peru*, in *Pre Columbian Archeology*, Sabloff, J, (eds.). San Francisco, Willey (1980).
- [6] Petersen, George: *Evolución y Desaparición de las Altas Culturas Paracas-Cahuachi (Nasca)*, Lima: Univ. Nacional Federico Villarreal (1980).
- [7] Reinhard, Johan: *Las Líneas de Nazca*, Lima, Ed. Los Pinos (1987).
- [8] Danby John: *Fundamentals of Celestial Mechanics*, Virginia, Willmann-Bell (1992)
- [9] Cohen, Bernard: *The Birth of a New Physics*, London, Penguin (1992).
- [10] Koestler, Arthur: *Los sonámbulos*, Barcelona, Salvat (1986).
- [11] Weinstock, Robert *Am.J.Phys.* **60**, No7, 615, (1992).
- [12] Alonso, Marcelo y Finn Edward: *Física*, Vol.1, Cap.13. Bogotá , Fondo Educativo Interamericano, (1970).
- [13] Lehmann, Charles: *Geometría Analítica*, México, Hispano Americana (1974)
- [14] Marion, Jerry: *Classical dynamics of particles and systems*, New York, Academic Press (1970)
- [15] Piskunov, N: *Cálculo Diferencial e Integral*, Moscu, MIR (1977).

This document was created with Win2PDF available at <http://www.daneprairie.com>.  
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.